

CONTROL I MA 2A1, 2009/1

Profs. M del Pino, M. Kowalczyk

- (1) (a) Considere la función

$$f(x, y) = \begin{pmatrix} 4y^2x + 1 \\ \sin(3x + y - 2) \end{pmatrix}.$$

Muestre que f es diferenciable en $(0, 2)$ y encuentre la mejor aproximación lineal afín $T(x, y)$ de f cerca de este punto.

- (b) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$, una función diferenciable en el punto $(0, 2)$ tal que

$$f(0, 2) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \quad f'(0, 2) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Considere la función $g(x, y) := f_1(x, y) + f_2(x, y)f_3(x, y)$. Demuestre que g es diferenciable en $(0, 2)$. Encuentre el vector $\nabla g(0, 2)$.

- (2) Considere la función

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) Demuestre que f es continua en $(0, 0)$ y que las derivadas direccionales $f'((0, 0); e)$, con e cualquier vector unitario, existen. Calcule las derivadas parciales

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0).$$

- (b) ¿Es f diferenciable en $(0, 0)$? Justifique claramente su respuesta.

- (3) Considere el conjunto

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geq 0, y \geq 0\}$$

y la función

$$f(x, y) = e^{-x^2-y^2}[x^2y^2 + \log(1 + xy)].$$

- (a) Demuestre que A es un conjunto cerrado y que f es una función continua en todo punto de \mathbb{R}^2 .

- (b) Demuestre que existe un punto $(\bar{x}, \bar{y}) \in A$ tal que

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(x, y) \quad \text{para todo } (x, y) \in A.$$

- (c) ¿Alcanza f su valor mínimo en A ? Justifique claramente su respuesta.

PAUTA CONTROL I MA 2A1, 2009/1

Profs. M del Pino, M. Kowalczyk

- (1) (a) (3 pts) Las derivadas parciales de f estan dadas por

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = 4y^2, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 8yx,$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = 3 \cos(3x + y - 2), \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = \cos(3x + y - 2).$$

Estas cuatro funciones de (x, y) son continuas en todo punto al ser conformadas por productos, sumas y composición de funciones de una variable continuas, y polinomios en dos variables. Por ende, la función f es diferenciable en todo punto, en particular en $(0, 2)$. Ahora, en este punto tenemos que

$$\frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 2) = 16, \quad \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 2) = 0, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 2) = 3, \quad \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 2) = 1.$$

Por lo tanto, la aproximación lineal afín está dada por

$$T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y - 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 16x \\ 3x + y \end{bmatrix}.$$

- (b) (3 pts) Como f es diferenciable en $(0, 2)$, cada una de sus funciones coordenadas f_1, f_2, f_3 lo es. Así, $g = f_1 + f_2 f_3$ está constituida por suma y producto de funciones diferenciable en $(0, 2)$, de modo que g es diferenciable en este punto. Por otra parte,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x} & \frac{\partial f_3}{\partial y} \end{bmatrix} (0, 2).$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(0, 2) = \frac{\partial f_1}{\partial x}(0, 2) + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial x}(0, 2) + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial x}(0, 2) = 5$$

y en modo similar

$$\frac{\partial g}{\partial y}(0, 2) = \frac{\partial f_1}{\partial y}(0, 2) + f_2 \frac{\partial f_3}{\partial y}(0, 2) + f_3 \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, 2) = 4$$

de modo que $\nabla g(0, 2) = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}$.

- (2) (a) (3 pts) Para la continuidad, consideremos una sucesión arbitraria $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ con $(x_n, y_n) \rightarrow (0, 0)$. Entonces

$$|f(x_n, y_n)| \leq \frac{|x_n y_n|}{x_n^2 + y_n^2} |y_n| \leq \frac{1}{2} |y_n| \rightarrow 0.$$

Entonces $f(x_n, y_n) \rightarrow f(0, 0)$. La continuidad se sigue. Por otra parte, consideremos un vector $e = (e_1, e_2)$ con $\|e\| = 1$. Tenemos que

$$\frac{1}{t}(f((0, 0) + te) - f(0, 0)) = \frac{e_1 e_2^2}{e_1^2 + e_2^2},$$

y por lo tanto tomando límite $t \rightarrow 0$, obtenemos

$$f'((0, 0); e) = \frac{e_1 e_2^2}{e_1^2 + e_2^2}.$$

Tomando respectivamente $e = (1, 0)$ y $e = (0, 1)$, obtenemos que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$$

(b) (3 pts) f no es diferenciable. En efecto, si lo fuera, se debería tener que

$$f'(0, 0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por otra parte, en tal caso, se debería también tener que

$$\frac{e_1 e_2^2}{e_1^2 + e_2^2} = f'((0, 0); e) = f'(0, 0)e = 0,$$

lo cual es una contradicción si e_1 y e_2 son distintos de cero.

- (3) (a) (2 pts) A es cerrado. En efecto, sea $(x_0, y_0) \in \text{Adh}(A)$. Entonces existe una sucesión $(x_n, y_n) \in A$ con $(x_n, y_n) \rightarrow (x_0, y_0)$. Como $x_n \rightarrow x_0$ y $x_n \geq 0$, se sigue que $x_0 \geq 0$. Del mismo modo, $y_0 \geq 0$, y concluimos que $(x_0, y_0) \in A$. Así, $\text{Adh}(A) \subset A$, por ende $\text{Adh}(A) = A$ ya que la inclusión opuesta siempre se cumple.

Para verificar la continuidad de f basta observar que f está constituida por producto y suma de funciones conformadas por composición de funciones continuas de una variable, y polinomios en dos variables.

(b) (2 pts) Observemos que como $xy \leq x^2 + y^2$, tenemos que si denotamos $t = x^2 + y^2$, entonces

$$0 \leq f(x, y) \leq e^{-t}(t^2 + \log(1 + t)).$$

Notemos que de una aplicación de la regla de l'hôpital,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t}(t^2 + \log(1 + t)) = 0$$

por lo tanto existe $R > 0$ tal que, para todo $t > R$,

$$e^{-t}(t^2 + \log(1 + t)) < f(1, 1) = e^{-2}(1 + \log 2).$$

Consideremos el conjunto

$$A_R := \{(x, y) \in A \mid x^2 + y^2 \leq R\}$$

A_R es cerrado, acotado, y además no-vacío, pues $(1, 1) \in A_R$. Como f es continua en A_R , concluimos que alcanza su máximo, (\bar{x}, \bar{y}) en este conjunto. Por lo tanto

$$f(x, y) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{para todo } (x, y) \in A_R.$$

Pero $f(\bar{x}, \bar{y}) \geq f(1, 1)$, de modo que

$$f(x, y) < f(1, 1) \leq f(\bar{x}, \bar{y}) \quad \text{para todo } (x, y) \in A \setminus A_R,$$

por lo que (\bar{x}, \bar{y}) maximiza a f sobre todo el conjunto A .

(c) (2 pts) Notamos simplemente que $f(x, y) \geq 0$ para todo $(x, y) \in A$, y que, por ejemplo, $f(0, 0) = 0$. Por lo tanto f alcanza su mínimo en $(0, 0)$ sobre A .